Abiturvorbereitung mit dem GTR

Die Aufgaben des IQB Pools sinnvoll nutzen.

Inhalt

1. Vorwort:

Wer sich oder seine Schüler:innen auf das Abitur vorbereiten möchte, findet im Aufgabenpool IQB der Länder die Abituraufgaben der vergangenen Jahre.

Link: IQB - Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder (hu-berlin.de)

Die Aufgaben für jedes Jahr gibt es in drei Varianten:

1) Hilfsmittelfreie Aufgaben, für deren Bearbeitung kein Taschenrechner zugelassen ist.
2) WTR Aufgaben, für deren Bearbeitung man einen wissenschaftlichen Taschenrechner benötigt.
3) CAS Aufgaben, die man mit einem Computer-Algebra-System lösen kann.

Schüler:innen, die einen graphikfähigen Taschenrechner (GTR) besitzen, finden keine für sie speziell erstellten Aufgaben. Orientieren sollen sich die Schüler:innen an den CAS-Aufgaben. Allerdings ist es für Schüler:innen nicht immer leicht zu erkennen, ob bestimmte Aufgaben mit dem GTR überhaupt lösbar oder ob es nicht doch einen „Trick" gibt, auch diese Aufgaben zu bearbeiten.

Das vorliegende Skript erläutert, wie die Aufgaben mit einem GTR gelöst werden können. Sollte dies nicht möglich sein, so habe ich die Aufgabenstellung ein wenig verändert, damit alle Aufgaben bearbeitet werden können.

Die Aufgaben unterteilen sich folgendermaßen:

Niveaustufe	**Prüfungsteil**	**Hilfsmittel**
Grundlegendes Anforderungsniveau	Prüfungsteil A	Kein Taschenrechner
	Prüfungsteil B	WTR
		CAS
Erhöhtes Anforderungsniveau	Prüfungsteil A	Kein Taschenrechner
	Prüfungsteil B	WTR
		CAS

Erläuterung:

Eingeteilt werden die Aufgaben in zwei Niveaustufen:

Grundlegendes Anforderungsniveau, entspricht Anforderungsbereich I und II

Erweitertes Anforderungsniveau entspricht zumindest bei einer Teilaufgabe auch Anforderungsbereich III

Zu jeder Niveaustufe gibt es die Prüfungsteile A und B.

Prüfungsteil A besteht aus „kleineren“ Aufgaben, die ohne Taschenrechner zu lösen sind. Dennoch empfiehlt es sich aus Übungsgründen die Ergebnisse im GTR zu kontrollieren.

Prüfungsteil B besteht aus größeren Aufgaben, deren Bearbeitungszeit ca. 90 Minuten erfordern.

Die WTR Aufgaben können auch alle mit dem GTR gelöst werden.

Weitere Hinweise und Dokumente finden sich hier:

IQB - Begleitende Dokumente — Mathematik (hu-berlin.de)

Hinweise:

Im Folgenden sollen die beiden CAS Aufgaben aus dem Jahr 2021 genauer betrachtet werden.

Vielleicht ist es sinnvoll, diese erst kurz vor der schriftlichen Prüfung bzw. „Vorabi“ zu bearbeiten und vorher zunächst die Prüfungsteile A und die WTR Aufgaben zu üben.

Im Abitur kämpft man leider nicht nur gegen die Mathematik, sondern auch gegen die Zeit. Um ein Zeitgefühl für die Aufgaben zu bekommen, ist es sinnvoll, nebenbei einen Timer zu stellen (90 Minuten) und die Aufgaben der Prüfungsteile B an einem Stück und ohne Unterbrechungen zu bearbeiten.

In diesem Sinne wünsche ich allen Prüflingen eine erfolgreiche Vorbereitungszeit und hoffe, dass das vorliegende Skript hierfür hilfreich ist.

Rückmeldung gerne an: GSAhliger@aol.com

2. Vorbereitung Aufgabe Erhöhtes Anforderungsniveau Analysis aus den Jahr 2021 CAS

1.) **Aufgabe:** Öffnen Sie die Aufgabenstellung, die aus urheberrechtlichen Gründen hier nicht gedruckt werden darf: IQB 2021 Erhöhtes Niveau CAS https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/erhoeht/2021_M_erhoeht_B_4.pdf

2.) **Aufgabenänderung:** Damit die Aufgaben mit dem GTR lösbar sind, ersetzen Sie die Aufgabe 1d durch folgenden Text: „Berechnen Sie die Tangentengleichung der Tangente t_f zu $f_a(x)$ an der Stelle $x = \frac{5}{a}$.“

3.) **Operatorenliste:** Operatoren_Mathematik.pdf (bildung-rp.de)

4.) **Timer stellen (90 Minuten):** Gewöhnen Sie sich früh an, auf Zeit zu arbeiten!!!

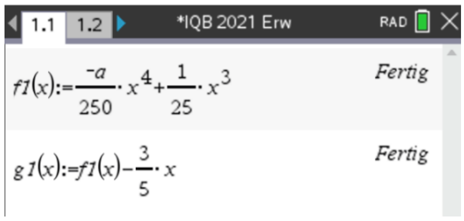
3. Musterlösung Aufgabe Analysis 1 aus dem Jahr 2021 CAS

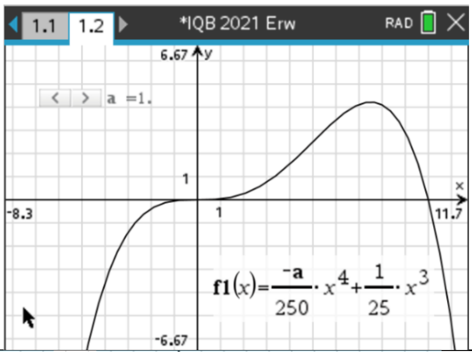
<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th></th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>
Vorbereitung: Neues Dokument erstellen.
Doc => Datei => 4 speichern => „IQB 2021 Erw“

Eingabe der Funktionen:
Achtung! Statt „f1(x) =“ schreibe „f1(x) :=“

Erstelle Schieberegle im Graph-Fenster.
Tipp: Verwende die minimale Darstellung. (Auf Schieberegler gehen und ctrl => Menu => Minimieren.)

Hinweis: Schon jetzt bei den Schiebreglereinstellung eingeben, dass a größer als 0 sein muss. Als Schrittweite empfiehlt sich 0.2.
</td><td>



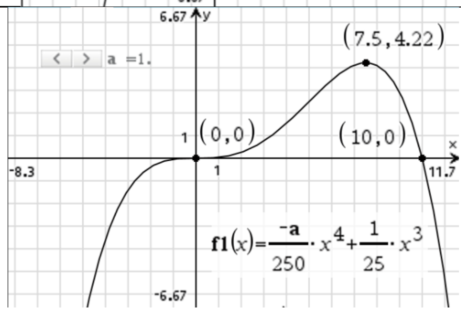


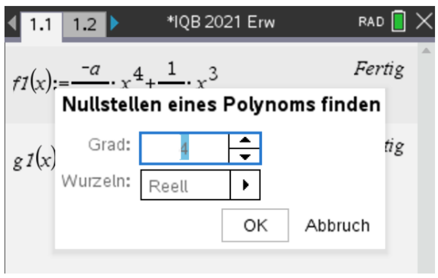
</td></tr>
<tr><td>a</td><td>
Operator: Berechnen, Zeichnen

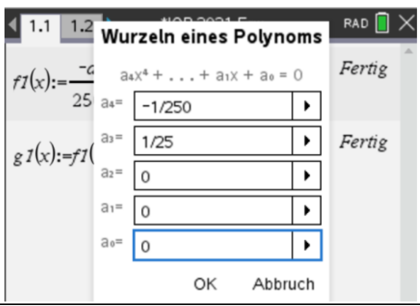
(Zur Kontrolle Nullstelle und Maximum graphisch ermitteln: Menu => Graph analysieren => Nullstelle bzw. Maximum)

Da der Operator „berechnen“ lautet:
Nullstelle ermitteln:
Da f_1 gesucht ist, gilt a = 1

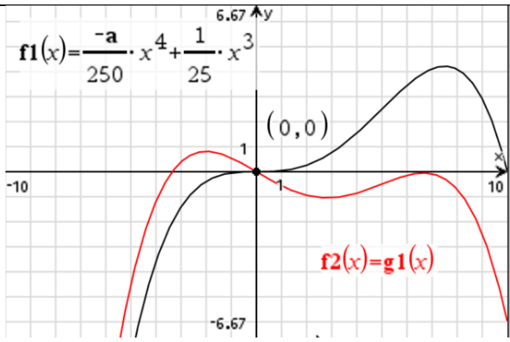
Menu=> Algebra => Polynomwerkzeuge => Nullstellen eines Polynoms finden => Grad : 4, Wurzeln: reell
</td><td>







</td></tr>
</table>

b	Als Ergebnis erhält man die dreifache Nullstelle N_1(0 |0) und die Nullstelle N_2 (10|0) Extremstelle: Am bestens per Hand ausrechnen! Einmal ableiten und Ableitung gleich null setzen. Man erhält die Werte $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$ $x_1 = 0$ ist ein Sattelpunkt und $x_2 = 10$ der gesuchte Extrempunkt. (Siehe graphische Darstellung) Dann den y-Wert ausrechnen. Es sind nur die Koordinaten des Extrempunktes gefragt. Daher ist nicht zu ermitteln, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt. Hinweis: Den Extrempunkt, kann man sich auch errechnen lassen, indem man numerisch die Ableitungsfunktion erstellt und diese gleich Null setzt. Vom GTR aus abzeichnen.	$f1(x):=\frac{-a}{250}\cdot x^4+\frac{1}{25}\cdot x^3$ *Fertig* $g1(x):=f1(x)-\frac{3}{5}\cdot x$ *Fertig* $\text{polyRoots}\left(\frac{-1}{250}\cdot x^4+\frac{1}{25}\cdot x^3,x\right)$ $\{0,0,0,10\}$ $\text{polyRoots}\left(\frac{-4}{250}\cdot x^3+\frac{3}{25}\cdot x^2,x\right)$ $\left\{0,0,\frac{15}{2}\right\}$ $f1(7.5)$ 4.21875 $f2(x):=\frac{d}{dx}(f1(x))$ *Fertig* $\text{nSolve}(f2(x)=0,x=5)$ 7.5 $f1(7.5)$ 4.21875
c	Operator: Begründen Der Übersichtlichkeit erstellen wir eine neue Seite: Doc => Einfügen => Neue Seite => Graph Fenster einfügen. (Geht aber auch über die Hometaste!) Dann f2(x) bzw. g1(x) zeichnen lassen! Man erkennt, dass gilt: Für $x < 0$: $f_1(x) < g_1(x)$. Für $x > 0$: $f_1(x) > g_1(x)$. Begründung: $f_1(x)$ und $g_1(x)$ unterscheiden sich nur durch $-\frac{3}{5}x$. Für $x < 0$ ist $-\frac{3}{5}x > 0$ und für $x > 0$ gilt: $-\frac{3}{5}x$ positiv.	

d	Operator: Angeben und Begründen In das neue Graphikfenster einen Schieberegler einfügen: Menu=> Aktionen=> B Schieberegler => Variable in a umbenennen. Achtung: Laut Voraussetzung ist $a \in \mathrm{IR}^+$, also a > 0. Vergleicht man nun die Wendepunkte der beidem Funktionen, stellt man fest: Anzahl: Die Anzahl der beiden Funktionen ist gleich, nämlich genau 2 Wendepunkte. Lage: Die x-Koordinaten sind gleich. Bei Wendepunkt x = 0 ist auch die y -Koordinate gleich und zwar y = 0 Beim zweiten Wendepunkt unterscheiden sich die y-Koordinaten. Begründung: Mit Aussage I gilt, dass sich die Funktionen : $f_1(x)$ und $g_1(x)$nur in dem Summanden $-\frac{3}{5}x$ unterscheiden. Da dieser Summand nach zweimaligen Ableiten verschwindet, gilt: $f''_1(x) = g''_1(x)$. Somit ist die Anzahl der Wendepunkte gleich. Laut Aussage II genau zwei Wendepunkte. Ebenso sind auch die x-Koordinaten der Wendepunkte gleich. Vergleicht man $f_1(x)$ und $g_1(x)$ bzgl. der y-Koordinate, dann ist diese für x = 0 auch y = 0. Für x = $\frac{5}{a}$ unterscheiden diese sich.	
	Achtung: Geänderte Aufgabenstellung, damit die Aufgaben mit dem GTR lösbar ist. Siehe oben! Operator: Berechnen Weg: Tangenten aufstellen und gleichsetzen. Ableitung: $f_1(x) = -\frac{1}{250}x^4 + \frac{1}{25}x^3$ $f'_1(x) = -\frac{4}{250}x^3 + \frac{3}{25}x^2$ y-Koordinate zu x = 5 $f_1(5) = -\frac{1}{250}5^4 + \frac{1}{25}5^3 = \frac{5}{2}$ Steigung m an der Stelle: $f'_1(5) = -\frac{4}{250}5^3 + \frac{3}{25}5^2 = 1$	$\frac{-1}{250}\cdot 5^4+\frac{1}{25}\cdot 5^3$ $\frac{5}{2}$ $\frac{-4}{250}\cdot 5^3+\frac{3}{25}\cdot 5^2$ 1 $\mathrm{nSolve}\left(\frac{5}{2}=1\cdot 5+b,b\right)$ -2.5

<table>
<tr>
<td></td>
<td>y- Achsenabschnitt ausrechen: y = mx +b

$$\frac{5}{2} = 1 \cdot 5 + b$$
b = -2,5

Die Tangente lautet daher: y = 1x - 2,5</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>e</td>
<td>Operator: Untersuche

Hinweis: Um das nebenstehende Schaubild im GTR zu erstellen, benötigt man zu viel Zeit. Man kann sich die Frage auch anhand der Abbildung aus Aufgabe 1b verdeutlichen.

Untersuchung in Punkt G:

Damit x = $\frac{5}{a}$ und die Tangente an g_a einen rechten Winkel bilden können, muss die Tangente g eine Steigung von 0 haben. Laut Aufgabe beträgt die Steigung $\frac{5-3a^2}{5a^2}$

Daher ergibt sich folgender Ansatz:
$\frac{5-3a^2}{5a^2} = 0 \mid \cdot 5a^2$

$5 - 3a^2 = 0$

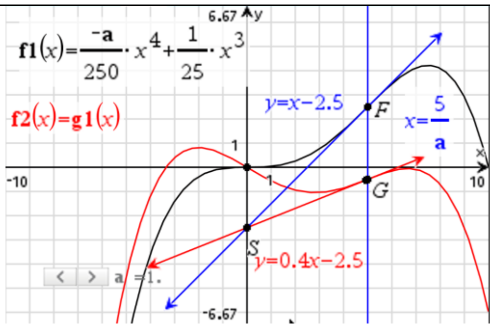
$a^2 = \frac{-5}{-3}$
$$a = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm\sqrt{\frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{15}$$Da laut Voraussetzung a > 0 sein soll, muss die negative Lösung nicht beachtet werden.

Für a = = $+\frac{1}{3}\sqrt{15}$ stehen die Tangenten senkrecht.

Nun müssen auch noch die beiden anderen Punkte des Dreiecks untersucht werden, da es ja noch weitere Werte für a geben könnte, an denen das Dreieck rechtwinklig werden kann.

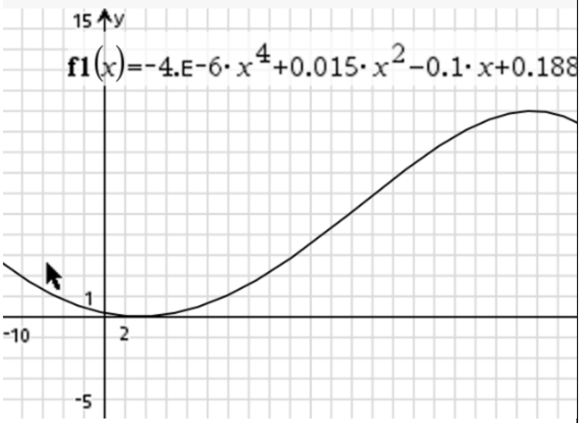
Untersuchung in F

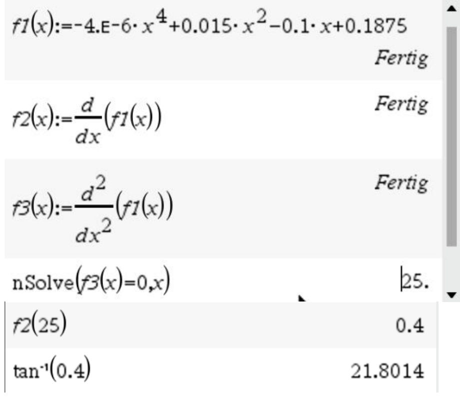
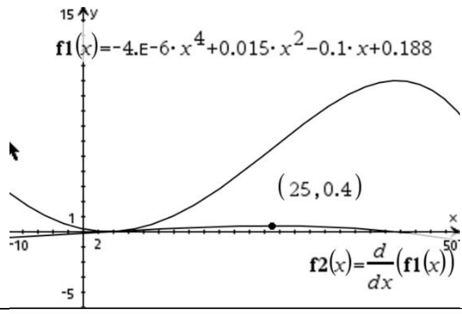
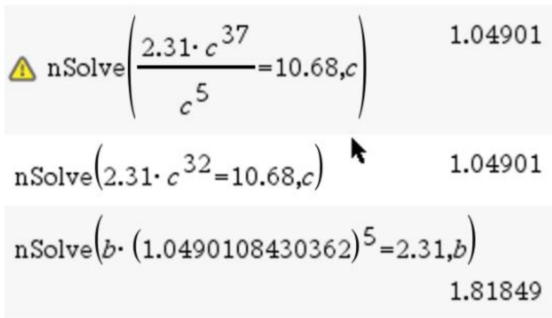
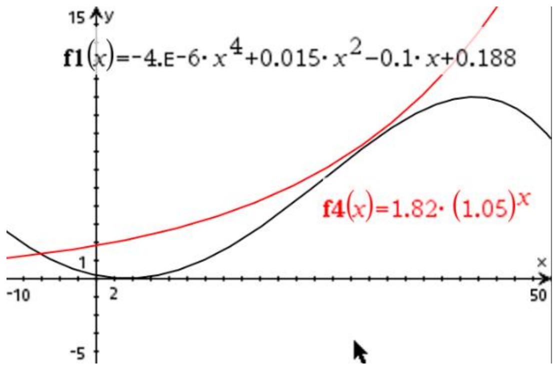
Auch hier muss überprüft werden, ob die Steigung der Tangente an f_a Null werden kann.

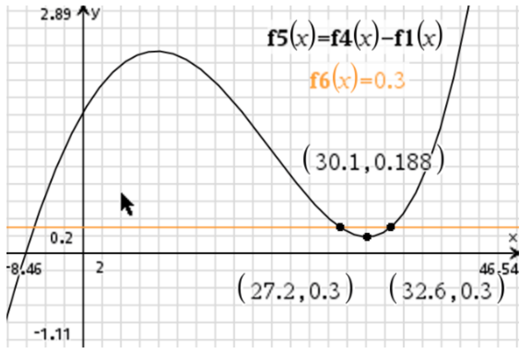
Als Steigung ist $\frac{1}{a^2}$ gegeben. Da a ungleich 0 sein muss, kann auch diese Steigung nicht 0 werden und somit das Dreieck in F nicht rechtwinklig.</td>
<td>

$\text{nSolve}\left(\frac{5-3\cdot a^2}{5\cdot a^2}=0,a\right)$ 1.29099

$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{15}$ 1.29099</td>
</tr>
</table>

	Untersuchung in S Vorüberlegung: Zwei Geraden/lineare Funktionen, stehen senkrecht aufeinander bzw. bilden einen rechten Winkel , wenn für die Steigungen gilt: m1 · m2 = -1 $$\frac{5-3a^2}{5a^2}\cdot\frac{1}{a^2} = -1$$ Diese Gleichung ist nicht lösbar, daher kann es auch hier keinen rechten Winkel geben. Einzige Möglichkeit bleibt also $$a = +\frac{1}{3}\sqrt{15}$$	$\mathrm{nSolve}\left(\frac{5-3\cdot a^2}{5\cdot a^2\cdot a^2}=-1,a\right)$ "Keine Lösung gefunden"
Aufgabe 2		
	Voraussetzung: Neues Problem eröffnen: DOC => Einfügen => Neues Problem Funktion eingeben und Schaubild mit Fenstereinstellungen gut lesbar einstellen	$f1(x):=-4.\mathrm{E}{-6}\cdot x^4+0.015\cdot x^2-0.1\cdot x+0.1875$ *Ferti* 
a	Operator: Berechne Der stärkste Anstieg befindet sich im Wendepunkt. Da wir den Wendepunkt im GTR nicht direkt ausrechnen können, bilden wir die erste und dann die	

	zweite Ableitung. Die zweite Ableitung gleich null setzen, ergibt die x Koordinate des Wendepunktes: x = 25 Dies in die 1. Ableitung eingesetzt, ergibt die Steigung in dem Punkt: m = 0.4. Achtung: Ist der Taschenrechner auf DEG eingestellt? Eingesetzt in $\tan^{-1}(0.4) = 21.80°$ Also ca. 22° beträgt die größte Steigung. Tipp: Wenn man mit nSolve arbeitet, empfiehlt es sich auch immer, den Sachverhalt im Graphikfenster anzuschauen, um sicher zu gehen, dass es nur die eine Lösung gibt.	 
b	Da man im GTR nur lineare Gleichungssyteme berechnen kann, muss man etwas vorarbeiten. I $\quad b \cdot c^5 = 2.31$ II $\quad b \cdot c^{37} = 10.68$ Nach b aufgelöst und gleichgesetzt: $$\frac{2.31}{c^5} = \frac{10.68}{c^{37}}$$ $$\frac{2.31 \cdot c^{37}}{c^5} = 10.68$$ ⇨ c ≈ 1.049 Dies in I $\quad b \cdot c^5 = 2.31$ eingesetzt, ergibt: b ≈ 1.818 Hinweis: Nebenstehend, sieht man, dass der GTR eine Warnung ausgibt, was mit der großen Zahl zu tun hat. Fassen wir die c zusammen, gibt es keine Warnung mehr.	 

c	Operator: Untersuche Da der Operator „Untersuche“ heißt, lösen wir die Aufgabe graphisch. Der Abstand des Seils zur Piste lässt sich für jeden Punkt durch d(x) = h(x)-p(x) ausrechnen Definieren wir diese neue Funktion als f5(x). Zeichnen wir dies in einem neuen Fenster. Als nächstes geben wir die Funktion f6(x) = 0.3 und ermitteln Schnittpunkte und Minimum. Achtung: Der Maßstab beträgt 10 Einheiten, daher 0.3 und nicht 3. Anhand der Schnittpunkte kann man sehen, dass der Abstand im Intervall I = [27.2 ; 32.6] 3 Meter und weniger beträgt. Im tiefsten Punkt sieht man, dass der Abstand 0.188 bzw. 1,9 m beträgt. Damit man auch hier 3 m erhält, müssen die beiden Enden um 1.1 m angehoben werden.	$f5(x):=f4(x)-f1(x)$ *Fertig* 
C	Operator: Bestimme Erläuterung zur nebenstehenden Rechnung: Zunächst berechnen wir die Fläche des Schneeprofils. Im Intervall I = [0 ; 5] können wir das Intervall direkt berechnen. Laut Einleitung der Aufgabe ist die Piste bis x = 41.5 lang. Im Intervall I = [5 ; 41.5] berechnen wir p(x) – p(x)-0,6), da die Schneehöhe 60 cm beträgt. (Zur Erinnerung: Mit dem Integral berechnen wir immer die Fläche unterhalb der Funktion bis zur x-Achse!). Wir erhalten einen Wert von 2.5. Aufgrund des Maßstabes multiplizieren wir mal 10 (x-Richtung) und noch einmal mal 10 (y-Richtung). Anders gesagt. Wir haben eine Fläche erhalten. Da der Maßstab 1:10 beträgt, müssen wir wegen m² mal 100 nehmen. Da die Piste noch 30 m breit ist, multiplizieren wir mit 30. Damit erhalten wir ein Volumen von 7500 m³	$\int_0^5 f1(x)\,dx+\int_5^{41.5}(f1(x)-(f1(x)-0.06))dx$ 2.5 $2.5\cdot 10\cdot 10\cdot 30$ 7500.

4. Vorbereitung Aufgabe Grundlegendes Anforderungsniveau Analysis aus den Jahr 2021 CAS

1. **Aufgabe:** Öffnen Sie die Aufgabenstellung, die aus urheberrechtlichen Gründen hier nicht gedruckt werden darf: IQB 2021 Grundlegendes Anforderungsniveau CAS https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/pools2021/abitur/pools2021/mathematik/grundlegend/2021_M_grundlege_17.pdf

2. **Aufgabenänderung:** IN ARBEIT

3. **Operatorenliste:** Operatoren_Mathematik.pdf (bildung-rp.de)

4. **Timer stellen (90 Minuten):** Gewöhnen Sie sich früh an, auf Zeit zu arbeiten!!!

5. Musterlösung Aufgabe Grundlegendes Anforderungsniveau Analysis aus den Jahr 2021 CAS

In Arbeit

6. Anmerkungen zu den Aufgaben der Analytischen Geometrie/ Matrizen und Stochastik

In Arbeit!